Esercizio 5

Risolvere

$$\begin{cases} y''' = 5y'' - 6y' \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 4 \end{cases}$$

L'equazione è del terz'ordine, senza termini di ordine zero (cioè senza y): con una opportuna sostituzione, mi riconduco a una equazione del second'ordine.
<u>Sostituzione:</u> Ponendo $z = y'$ ottengo

$$\begin{cases} z'' - 5z' + 6z = 0 \\ z(0) = 2 \\ z'(0) = 4 \end{cases}$$

<u>Risoluzione dell'equaz. in z:</u> si tratta di una eq. lineare del second'ordine a coefficienti costanti, omogenea: le radici dell'associata equazione algebrica sono $z_1 = 2$ e $z_2 = 3$, e quindi trovo l'integrale generale

$$\bar{z}(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali concludo

$$z(t) = 2e^{2t} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

<u>Risoluzione dell'equaz. in y:</u> Da $y'(t) = z(t)$ segue

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0) + \int_0^t 2e^{2s}\, \mathrm{d}s \\ &= 2 + \left[e^{2s}\right]_0^t = e^{2t} + 1 \ \forall\, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$